ESCUELA DE ENSEÑANZA TÉCNICO PROFESIONAL PARTICULAR INCORPORADA Nº 2010 - IDESA

Docente: Domenichini, Mara
Contacto: marad-rafaela@hotmail.com

Asignatura: Matemática

Curso: 6º año

Leer con atención y realizar las actividades propuestas en la carpeta, sin excepción.
Dichas actividades se entregarán el primer día de clases luego de iniciadas las actividades áulicas

Unidad N° 1: MATRICES

Una matriz es un conjunto de números reales, que están dispuestos en "m" filas y en "n" columnas:

$$A_3 \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Ésta es una matriz de m filas y n columnas. Es decir, de dimensión m x n. Los términos tienen dos subíndices: el primero indica la fila; el segundo, la columna. Así, el término a_{32} es el que está en la 3º fila, 2º columna.

Las matrices tienen por nombre una letra mayúscula.
A los números que forman la matriz se les llama elementos y se encierran entre paréntesis.
Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

El número de filas por el número de columnas se denomina dimensión de la matriz y se designa como m x n, siendo m el número de filas y n el número de columnas.

Ejemplo:
El consumo, en kg, de pan, carne y mantequilla de una familia durante los años 1980, 1981, 1982 y 1983 se puede disponer así:

	PAN	CARNE	MANTEQUILLA
1980	430	157	8
1981	390	162	6
1982	410	169	10
1983	360	180	9

La caja de números $\begin{pmatrix} 430 & 157 & 8 \\ 390 & 162 & 6 \\ 410 & 169 & 10 \\ 360 & 180 & 9 \end{pmatrix}$ es una matriz.

Sus elementos aparecen dispuestos en filas (líneas horizontales) y columnas (líneas verticales). Esta matriz tiene 4 filas y 3 columnas, lo que se resume diciendo que es una matriz de dimensión 4 x 3.

También son matrices:

$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 7 & 11 \end{pmatrix}$ de dimensión 1 x 5 (1 fila y 5 columnas)

$B = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ de dimensión 3 x 1

$C = \begin{pmatrix} 3 & -11 & 4 \\ 0 & 7 & \frac{3}{4} \\ 1 & 5 & 8 \end{pmatrix}$ es una matriz 3 x 3

Tipos de matrices:

Matriz rectangular
Es aquella que tiene distinto número de filas que de columnas ($m \neq n$):

$$A = \begin{pmatrix} 12 & -2 & 1 \\ 3 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

*Matriz fila
Es toda matriz rectangular que tiene una sola fila (m = 1).

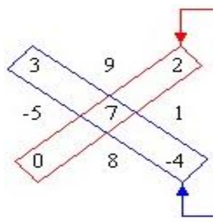
$$\begin{pmatrix} -8 & 5 & 20 \end{pmatrix}$$

*Matriz columna
Es toda matriz rectangular con una columna (n = 1).

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 7 \\ -9 \end{pmatrix}$$

Matriz Cuadrada
Las matrices cuadradas tienen igual número de filas y columnas ($m \neq n$).
En ella aparecen la diagonal principal y la diagonal secundaria

DIAGONAL SECUNDARIA



DIAGONAL PRINCIPAL

Matrices cuadradas especiales:

Matriz triangular superior	Matriz triangular inferior	Matriz diagonal	Matriz escalar	Matriz identidad o unidad (I)
los elementos están situados por debajo de la diagonal principal son ceros. $\begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	Los elementos están situados por encima de la diagonal principal son ceros. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$	Todos los elementos que no están situados en la diagonal principal son nulos. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$	Es una matriz diagonal en la que los elementos de la diagonal principal son iguales. $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$	Es una matriz diagonal en la que los elementos de la diagonal principal son iguales a 1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Algo más sobre matrices….
MATRICES OPUESTAS:
La matriz opuesta de una dada es la que resulta de sustituir cada elemento por su opuesto. La opuesta de A es $-A$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad -A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -3 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

MATRICES TRASPUESTAS
La traspuesta de una matriz A consiste en intercambiar las filas por las columnas y se denota por A^T. Así, la traspuesta de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

*La trasposición de una matriz cumple las siguientes propiedades:

$(A + B)^T = A^T + B^T$ $\quad$ $(A^T)^T = A$. $\quad$ $(k.A)^T = k.A^T$ (si k es un escalar). $\quad$ $(A . B)^T = B^T . A^T$

MATRICES SIMÉTRICAS

Se dice que una matriz real es simétrica, si $A^T = A$; y que es antisimétrica, si $A^T = -A$.

Ejemplo:

Consideremos las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -3 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & -8 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 \\ -3 & 0 & 5 \\ 4 & -5 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Podemos observar que los elementos simétricos de *A* son iguales, o que $A^T = A$. Siendo así, *A* es simétrica.
Para *B* los elementos simétricos son opuestos entre sí, de este modo *B* es antisimétrica.
A simple vista, *C* no es cuadrada; en consecuencia, no es ni simétrica ni antisimétrica.

ACTIVIDAD 1: DETERMINA EL TIPO Y LA DENOMINACIÓN DE CADA MATRIZ:

Por ejemplo:

$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ es una matriz de orden 2x3 $\qquad \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ es una matriz escalar de orden 2

$A)\ \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ $\quad B)\ \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad C)\ (3 \quad 4 \quad -2)$ $\quad D)\ \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$E)\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad F)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad G)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad H)\ (-1)$

ACTIVIDAD 2: ESCRIBE:

A) UNA MATRIZ CUADRADA DE ORDEN 3
B) UN VECTOR FILA DE ORDEN 4
C) UN VECTOR COLUMNA DE ORDEN 2
D) UNA MATRIZ DE 3x2
E) LA MATRIZ TRASPUESTA DE $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 8 \\ 0 & 6 & -1 \end{pmatrix}$
F) UNA MATRIZ TRIANGULAR SUPERIOR DE ORDEN 3
G) UNA MATRIZ ESCALAR DE ORDEN 4
H) UNA MATRIZ SIMÉTRICA DE ORDEN 3
I) UNA MATRIZ IDENTIDAD DE ORDEN 4
J) LA MATRIZ OPUESTA DE $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -11 & 7 \end{pmatrix}$

OPERACIONES CON MATRICES:

SUMA: para sumar matrices es necesario que tengan la misma dimensión, en tal caso se suma término a término.

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 \\ 2 & 10 & 5 \\ 7 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

RESTA: para restar matrices es necesario que tengan la misma dimensión, en tal caso se resta término a término.

$$A - B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -3 \\ 7 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 8 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -2 & 0 & -11 \\ 7 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

MULTIPLICACIÓN DE UN NÚMEROS POR UNA MATRIZ: se multiplica por un número cada término de la matriz.

$$5 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 7 & 2 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 15 & 25 & 5 \\ 35 & 10 & 20 & 15 \\ -5 & 25 & 0 & 40 \end{pmatrix}$$

PRODUCTO DE MATRICES:

*El producto de un vector fila por un vector columna, ambos de la misma dimensión, es un número que se obtiene multiplicándolos término a término y sumando los resultados.

Ejemplo:

$$(2 \ 3 \ 5 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 7 + 5 \cdot 0 + 1 \cdot 4 = 27$$

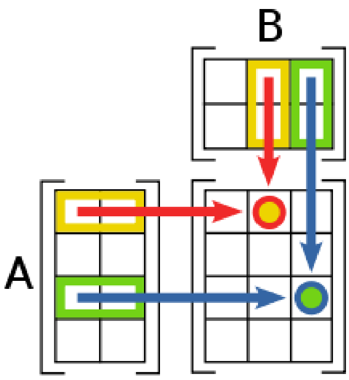
*Dos matrices cualesquiera se pueden multiplicar cuando el número de columnas de la primera es igual al número de filas de la segunda. Se debe multiplicar cada uno de los vectores fila de la primera por cada uno de los vectores columna de la segunda.

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 & 1 \\ 7 & 2 & 4 & 3 \\ -1 & 5 & 0 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 7 & 2 \\ 0 & -5 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 3 \cdot 7 + 5 \cdot 0 + 1 \cdot 4 & 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 5 \cdot (-5) + 1 \cdot 0 \\ 7 \cdot 1 + 2 \cdot 7 + 4 \cdot 0 + 3 \cdot 4 & 7 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot (-5) + 3 \cdot 0 \\ -1 \cdot 1 + 5 \cdot 7 + 0 \cdot 0 + 8 \cdot 4 & -1 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 0 \cdot (-5) + 8 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & -17 \\ 33 & -9 \\ 66 & 9 \end{pmatrix}$$

Observa que:
-Las vectores fila de la primera son de la misma dimensión que los vectores columna de la segunda.
-El producto es una matriz con tantas filas como la primera y tantas columnas como la segunda.
-El elemento c_{11} de la matriz producto se obtiene multiplicando la primera fila de A por la primera columna de B
Análogamente c_{32} se obtiene multiplicando la tercera fila de A por la segunda columna de B

Podemos realizar la multiplicación utilizando el siguiente formato:



$$\left\{\begin{array}{l} si\ A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 6 \\ 0 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \\ Entonces\ A\ x\ B\ se\ calcula\ ... \\ \begin{array}{cc|ccc} & & 4 & -2 & 5 \\ & & 1 & 3 & 2 \\ \hline 1 & -2 & 2 & -8 & 1 \\ 3 & 6 & 18 & 12 & 27 \\ 0 & 2 & 2 & 6 & 4 \\ 4 & -1 & 15 & -11 & 18 \end{array} \end{array}\right.$$

$\rightarrow 1\,.(-2) + (-2).3 = -8$

$\rightarrow\ 0\,.5 + 2\,.2 = 4$

POTENCIACIÓN:

Por definición: $A^0 = I$ $\quad A^2 = A\,.A$ $\quad A^3 = A\,.A\,.A$ $\quad A^n = A\,.A.\underset{\dots\dots}{^{n\ veces}}A$ $\quad A^{m+n} = A^m\,.A^n$

MATRIZ INVERSA: Si A es una matriz cuadrada se puede encontrar una matriz B del mismo tamaño tal que A . B = B . A = I, entonces se dice que A es invertible y B es una inversa de A.

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $es\ inversa\ de\ B = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ $ya\ que\ A\,.B = B\,.A = I$

ACTIVIDADES:

1- SI $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ ENTONCES $(-A)^T$ ES:

$A)\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad B)\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad C)\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad D)\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$ $\quad E)\ Ninguna\ de\ las\ anteriores$

2- DADAS: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad C = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 8 & -10 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad D = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 5 \\ 6 & 2 & 4 \end{pmatrix}$

CALCULA: E = 2 . A – 3 . B + C – 2 . D

3- DADAS LAS MATRICES: $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & -1 \\ 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}$ $\quad B = \begin{pmatrix} -6 & -1 & 9 \\ 0 & -7 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 8 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

RESUELVE:

a) $A - B =$ $\quad b)A + B =$ $\quad c)\ 3\cdot C =$ $\quad d)\ A\cdot C =$ $\quad e)\ B\,.C =$

$f)\ 2.A - 3.B =$ $\quad g)\ 4\,.A + B - C^T =$ $\quad h)\ (A+B)^T =$ $\quad i)\ \left(\frac{1}{2}.A\right).(-C) =$

4- DADAS: $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 5 & -7 & -1 \end{pmatrix}$ $y \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

a) DETERMINA SI **B** ES LA MATRIZ INVERSA DE **A.** JUSTIFICA.
b) ANOTA LA MATRIZ TRASPUESTA DE **B** Y LA MATRIZ OPUESTA DE **A**
c) HALLA: $*\ B + A$ $\qquad *\ A - B$

5- SEA $A = (2 \quad 1 \quad 5)$ Y $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ ESCRIBE LOS PRODUCTOS A . B Y B . A

6- COMPRUEBA QUE LA MATRIZ INVERSA DE **A** ES **A**$^{-1}$ SIENDO: $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & -5 & -3 \end{pmatrix}$ $\quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -15 & -8 & -3 \\ -9 & -5 & -2 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

7- DADAS LAS MATRICES: $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ Y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

CALCULA $* A . B$ $* A^2 - 3 . B^T$ $* B^T . A$ $* (A - B)^2$

8- HALLA LA MATRIZ $\boldsymbol{X}$ TAL QUE:

A) $\boldsymbol{X} + \boldsymbol{3}.\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A^2}$ SI $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

B) $\boldsymbol{3} . \boldsymbol{X} - \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A^T}$ SI $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ Y $B = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

C) $\boldsymbol{X} + \boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} . \boldsymbol{B}$ SI $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 13 & -4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

D) $\boldsymbol{X} + \boldsymbol{2}.\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{A}.\boldsymbol{B} - \boldsymbol{A})^{\boldsymbol{T}}$ SI $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

E) $\boldsymbol{3}.\boldsymbol{X} - \boldsymbol{3}.\boldsymbol{A} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}} \cdot \boldsymbol{B}$ SI $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & -1 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ Y $B = -2.A$